

Christoph Gottlieb Schröter (1699–1782) und die „Nothwendigkeit der Mathematik bey gründlicher Erlernung der musikalischen Composition“

Peter Ullrich

Universität Koblenz,
Fachbereich 3: Mathematik / Naturwissenschaften,
Mathematisches Institut

1 Das mathematische Problem der gleichschwebenden Stimmung

Die Querverbindungen zwischen Mathematik und Musik beginnen zumindest mit der auf die Pythagoräer zurückgehenden Harmonielehre, die auf den Frequenzverhältnissen $2 : 1$ für die Oktave, $3 : 2$ für die Quinte, $5 : 4$ für die große Terz und $6 : 5$ für die kleine Terz basiert, die sich allesamt durch kleine natürliche Zahlen ausdrücken lassen. Dem Aneinandersetzen von Tonintervallen entspricht dabei die Multiplikation der zugehörigen Frequenzverhältnisse; so entspricht der Tatsache, dass eine große und eine kleine Terz zusammen eine Quinte ergeben, die Gleichung $(6 : 5) \times (5 : 4) = 6 : 4 = 3 : 2$.

Diese auf natürlichen Zahlen beruhende Kompositionskunst stößt allerdings beim nicht schließenden Quintenzirkel an ihre Grenzen: Oktaven und Quinten lassen sich nicht in ein ganzzahliges Verhältnis setzen, da es keine von Null verschiedenen ganzen Zahlen m , n gibt mit $2^{m+n} = 3^n$, d. h., $(2 : 1)^m = (3 : 2)^n$. Insbesondere stimmen zwölf Quinten und sieben Oktaven nur fast überein, wobei der Unterschied, das sogenannte „pythagoräische Komma“, fast einen Achtelton ausmacht.

Ungefähr zu Beginn der Neuzeit wurden in Europa Konzerte üblich, bei denen man Instrumente mit fixierten Abständen der Tonhöhen einsetzte, wie Orgel, Pianoforte, Saiteninstrumente mit Bündeln, und zudem zwischen den einzelnen Stücken die Tonart wechselte. Um hörbare Misstöne zu vermeiden, ging man daher von der pythagoräischen zur sogenannten „gleichschwebenden“ (auch: „gleichstufigen“ oder „gleichtemperierten“) Stimmung über, bei der eine Oktave in zwölf gleich große Halbtöne unterteilt wird, wobei eine Oktave auch bei dieser Stimmung dem Tonverhältnis $2 : 1$ entspricht.

Falls bereits geeignete Stimmgabeln oder gar elektronische Tongeneratoren zur Verfügung stehen, kann man die dazu erforderlichen Tonhöhen unmittelbar realisieren. Falls nicht, muss man ein nicht mehr ganzzahliges mathematisches Problem lösen: Da das Aneinandersetzen von Tonintervallen der Multiplikation der zugehörigen Frequenzverhältnisse

entspricht, müssen die zwölf gleich großen Halbtöne, in die eine Oktave zerlegt wird, jeweils einem Frequenzverhältnis von

$$\sqrt[12]{2} : 1$$

entsprechen. Auf einfacher mechanischer Basis lassen sich derartige Frequenzverhältnisse realisieren mit Hilfe eines Monochords, einer einzelnen eingespannten Saite. Hierbei sind die Länge des in Schwingung versetzten Abschnitts der Saite und die Frequenz des dadurch erzeugten Tons umgekehrt proportional zueinander.

Man steht also vor der Aufgabe [3, S. 455],

„Einem willkürlich langen Monochord so viele Theile zuzueignen, als nöthig sind zu beweisen, daß zwölf einfach Klangstufen gleichschweben“.

Es ist naheliegend, diese Aufgabe dadurch zu lösen, dass man eine hinreichend gute Näherung von $\sqrt[12]{2}$ bestimmt und dann deren Potenzen bis zur elften zu berechnet, was die erforderlichen Längen- und damit Frequenzverhältnisse bis zum elften Halbton liefert.

Christoph Gottlieb Schröter, der Autor der 1747 erschienenen Schrift [3], aus der die obige Aufgabenformulierung stammt, bietet hingegen eine sowohl vom mathematischen Inhalt als auch mathematikhistorisch gesehen interessante Alternative an: Er erzeugt rationale Näherungen simultan für alle Zahlen

$$\sqrt[12]{2}, \left(\sqrt[12]{2}\right)^2, \dots, \left(\sqrt[12]{2}\right)^{10}, \left(\sqrt[12]{2}\right)^{11},$$

approximiert also nicht nur eine Zahl, sondern ein Zahlentupel, was für seine Zeit sehr fortschrittlich war.

Genauer gesagt liefert sein Verfahren, das er bereits 1716 und 1738 ankündigte und das allein auf Additionen und einer der Normierung dienenden Division am Ende beruht, natürliche Zahlen, deren Quotienten hinreichend gute Näherungen der genannten Potenzen von $\sqrt[12]{2}$ sind, wobei der Nenner stets der gleiche bleibt.*

2 Zu Leben und Werk Schröters

2.1 Zu seinem Lebenslauf

Christoph Gottlieb Schröter wurde am 10. August 1699 in Hohenstein (seit 1791: Hohnstein) in der Sächsischen Schweiz geboren. Im Jahr 1707 wurde er Chorknabe an der Hofkapelle in Dresden bei dem ebenfalls in Hohenstein geborenen Hofkapellmeister und Komponisten Johann Christoph Schmidt (1664–1728), besuchte nach dem Stimmbruch die Kreuzschule in Dresden und nahm 1717 das Studium der Theologie in Leipzig auf.

*Bereits Benedetto Scimemi [4] gibt eine Analyse der Mathematik des Schröterschen Verfahrens, allerdings, wie er bekundet [4, S. 60, Fußnote 3], ohne den Schröterschen Text [3] selbst gesehen zu haben.

Bald jedoch, nach dem Tod seiner Mutter, brach er dieses Studium ab und wechselte zurück nach Dresden, um bei Schmidt Musik zu studieren. Für den dort weilenden italienischen Komponisten Antonio Lotti (1667–1740) arbeitete er als Kopist. Es schlossen sich Reisen ins weitere Deutschland, nach Holland und England als Sekretär und musikalischer Gesellschafter an.

Im Jahr 1724 wechselte Schröter nach Jena, wo er an der Universität öffentliche Vorträge über Musik hielt. Zwei Jahre später, 1726, erhielt er die Stelle des Organisten an der Hauptkirche in Minden, damals Hauptstadt des gleichnamigen Fürstentums. Von 1732 an wirkte er in der gleichen Funktion an der Hauptkirche der Freien Reichsstadt Nordhausen in Thüringen bis zu seinem Tode am 20. Mai 1782.



Christoph Gottlieb Schröter

Quelle: Lorenz Mizlers Musikalische Bibliothek, Band 4, Teil 1 (1754)
Digitalisat: Wien, Österreichische Nationalbibliothek, Bildarchiv und Grafiksammlung,
Porträtsammlung,
<https://www.portraitindex.de/documents/obj/oai:baa.onb.at:3809133>

2.2 Zu seinem Werk

Verglichen mit seinen musikalischen Zeitgenossen Georg Philipp Telemann (1681–1767) und Johann Sebastian Bach (1685–1750) war Schröter offenbar recht umtriebig; er wurde noch vor diesen Mitglied der 1738 von Lorenz Mizler (1711–1778) gegründeten „Correspondierenden Societät der musicalischen Wissenschaften“. (Das Abzeichen dieser „Societät“ liegt auf dem oben abgebildeten Porträt Schröters vor ihm auf dem Tisch.) Seine Fähigkeiten als Organist lassen sich mit denen von Bach deshalb schlecht vergleichen, weil Schröter stets staccato spielte, Bach hingegen legato. Sein Werk als Komponist ist nur unvollständig überliefert, da viele Stücke 1761 bei der Plünderung von Nordhausen

während des Siebenjährigen Krieges verloren gegangen sind. Über eine seine musiktheoretischen Arbeiten ist hier zu berichten. In die musikhistorische Literatur hat Schröter allerdings vor allen Dingen Eingang gefunden als

2.3 Einer der Erfinder des Pianoforte

Die Erfindung des Pianoforte, also eines Cembalos, das sowohl leise („piano“) als auch laut („forte“) gespielt werden kann, ist recht komplex:

Im Jahr 1698 stellte Bartolomeo Cristofori (1655–1731) in Venedig ein Cembalo fertig, welches in unterschiedlicher Lautstärke gespielt werden konnte. Einige Jahre später, 1711, publizierte Scipione Maffei (1675–1755) im *Giornale de' letterati d'Italia* einen Artikel „Nuova invenzione d'un Gravecembalo col piano e forte [...]“ über diese Erfindung.

Schröter entwickelte 1717 eine Hammermechanik für ein derartiges Pianoforte und überreichte 1721 ein Modell dieser dem Dresdener Hof. Ungefähr zu jener Zeit entwickelte auch Gottfried Silbermann (1683–1753) eine entsprechende Mechanik. Im Jahr 1725 übersetzte Johann Mattheson (1681–1764) den Artikel von Maffei ins Deutsche und veröffentlichte ihn in seiner *Critica musica* mitsamt einer Abbildung der Mechanik.

Erst 1763 erhob dann Schröter sehr deutlich Protest gegen Silbermanns Prioritätsansprüche auf das Pianoforte. Die Diskussion dieser Frage in Deutschland ignorierte dabei bis ins 19. Jahrhundert hinein größtenteils die Erfindung Cristoforis, obwohl bereits Jacob Adlung (1699–1762) in seiner 1768 posthum veröffentlichten *Musica mechanica* berichtete, dass sich Silbermann in Freiberg ein Pianoforte von Cristofori hatte kommen lassen.

3 Schröters Lösung des Problems der gleichschwebenden Stimmung aus dem Jahre 1747

Wie bereits erläutert, läuft das genannte Problem darauf hinaus, auf einem gegebenen Monochord der Länge $2L$ die von einem der Enden ausgehenden Strecken der Länge $L, L \sqrt[12]{2}, L (\sqrt[12]{2})^2, \dots, L (\sqrt[12]{2})^{11}$ abzutragen. Schröter veröffentlichte seine Lösung im II. Teil seiner umfangreichen Abhandlung „Nothwendigkeit der Mathematik bey gründlicher Erlernung der musikalischen Composition, dem mit nachdrücklicher Bescheidenheit beurtheilten critischen Musico erwiesen“, welcher im Teil 3 von Band 3 von *Lorenz Mizlers Musikalische Bibliothek* erschien [3]. Dort findet sich folgende Tabelle [3, S. 457]:

	Die kleinen Differenzen.	Die großen Differenzen.	Die gleichschwebende Temperatur.
C		54	902
cis	3	51	851
d	3	48	803
dis	3	45	758
e	3	42	716
f	2	40	676
fis	2	38	638
g	2	36	602
gis	2	34	568
a	2	32	536
b	2	30	506
h	2	28	478
c	1	27	451
	27	451	

Schröters Erläuterungen hierzu kann man Folgendes entnehmen: Die betrachtete Oktave geht vom Ton C zum Ton c; diese Töne und die 11 dazwischenliegenden Halbtöne sind in der Spalte links vor dem Rahmen der Tabelle angegeben, oben mit C beginnend. (Man beachte, dass Schröter Längen angibt, höhere Zahlenwerte also niedrigeren Tonhöhen entsprechen.) Bei den folgenden Umzeichnungen der Schröterschen Tabelle wird noch eine Spalte mit den betreffenden Exponenten von $\sqrt[12]{2}$ davorgesetzt, von oben 12 für C bis unten 0 für c.

Schröter trägt in die Spalte mit der Überschrift „Die großen Differenzen“ diejenigen Frequenzverhältnisse ein, die die pythagoräische Stimmung problemlos liefert. Um diesen Prozess übersichtlicher zu darzustellen, wird in den Umzeichnungen eine zusätzliche Doppelspalte eingefügt zwischen der Spalte, in der die Notenangaben stehen, und der mit der Überschrift „Die kleinen Differenzen“. Da Schröter im Folgenden Brüche vermeiden will, bietet es sich für ihn angesichts der pythagoräischen Frequenzverhältnisse an, die Zahlen für das Verhältnis von C zu c nicht als 2 und 1, sondern als 6 und 3 zu wählen. Damit erhält er in der ersten Umzeichnung folgende Einträge in der Spalte direkt rechts neben der Spalte mit den Notenangaben. Um auch im nächsten Schritt ohne Brüche auszukommen, multipliziert er diese Werte noch mit 9. (Die genaue Wahl dieses Faktors rechtfertigt sich durch die folgende Rechnung.) Die Produkte werden in die nächste Spalte eingetragen:

Exponent von $\sqrt[12]{2}$	Note	pythago- räisch	
12	C	6	54
11	cis		
10	d		
9	dis	5	45
8	e		
7	f		
6	fis		
5	g	4	36
4	gis		
3	a		
2	b		
1	h		
0	c	3	27

Um die in der zuletzt angefügten Spalte noch fehlenden Werte einzutragen, interpoliert Schröter zwischen den bereits eingetragenen Werten und zwar mit stückweise konstanten ganzzahligen Inkrementen, die von unten nach oben monoton ansteigen, wobei er maximal zwei verschiedene Werte pro Interpolationsintervall zulässt. Die Inkremente werden in die Spalte mit der Überschrift „Die kleinen Differenzen“ eingetragen.

Exponent von $\sqrt[12]{2}$	Note	pythago- räisch		„Die kleinen Differenzen.“	
12	C	6	54		54
11	cis			3	51
10	d			3	48
9	dis	5	45	3	45
8	e			3	42
7	f			2	40
6	fis			2	38
5	g	4	36	2	36
4	gis			2	34
3	a			2	32
2	b			2	30
1	h			2	28
0	c	3	27	1	27
				$\Sigma = 27$	

Die Einträge in der Spalte rechts daneben entstehen dann so, dass man, unten mit 1 und 27 beginnend, die darunterstehenden Einträge der Spalte „Die kleinen Differenzen“ und der Spalte ganz rechts addiert, also als erstes $1 + 27 = 28$ erhält, dann $2 + 28 = 30$, usw.. Schröter hat dabei die Inkremente so gewählt, dass bei diesem Vorgehen an den durch die pythagoräische Harmonielehre vorgegebenen Stellen die bereits eingetragenen Werte

erzeugt werden, etwa für den Exponenten 5 bzw. die Note g der Wert 36. Hieraus folgt, dass die Summe aller Inkremente zusammen mit dem Wert 27 in der mit „0“ beginnenden Zeile der zuletzt angefügten Spalte den Wert 54 in der obersten, mit „12“ beginnenden Zeile ergeben muss, die Summe aller Inkremente also gleich $54 - 27 = 27$ sein muss, was wegen $54 = 2 \cdot 27$ gerade auch der Startwert in der mit „0“ beginnenden Zeile ist.

Bildet man für die so gefundenen Werte in der letzten Spalte für $j = 0, 1, \dots, 12$ den Quotienten der Zahl in der mit „j“ beginnenden Zeile mit der Zahl in der mit „0“ beginnenden Zeile, also 27, so erhält man jeweils eine Näherung für $(\sqrt[12]{2})^j$. Diese weicht relativ um maximal 2,11 % von dem korrekten Wert für die gleichschwebende Stimmung ab. Allerdings kann das menschliche Gehör relative Tonhöhenunterschiede von circa 0,6 % noch wahrnehmen, so dass Abweichungen der Näherungen von den korrekten Werten deutlich hörbar sind.

Schröters Idee ist nun, den Schritt, der von der vorletzten Spalte, der mit der Überschrift „Die kleinen Differenzen“, zu letzten Spalte geführt hat, zu iterieren:

Dazu versieht er die letzte Spalte mit der Überschrift „Die großen Differenzen“ und addiert deren Einträge von der mit „11“ beginnenden bis zu der mit „0“ beginnenden Zeile, was 451 ergibt. Diesen Wert trägt er als untersten in eine jetzt noch angefügte Spalte mit der Überschrift „Die gleichschwebende Temperatur“ ein und führt dann das eben beschriebene Berechnungsverfahren erneut durch: Jeder Wert in der neuen Spalte ergibt sich als Summe des Wertes in dieser Spalte direkt darunter und des Wertes in der Spalte „Die großen Differenzen“ schräg darunter. Dies liefert ihm die folgende Tabelle:

Exponent von $\sqrt[12]{2}$	Note	pythago- räisch		„Die kleinen Differenzen.“	„Die großen Differenzen.“	„Die gleichschwebende Temperatur.“
12	C	6	54		54	902
11	cis			3	51	851
10	d			3	48	803
9	dis	5	45	3	45	758
8	e			3	42	716
7	f			2	40	676
6	fis			2	38	638
5	g	4	36	2	36	602
4	gis			2	34	568
3	a			2	32	536
2	b			2	30	506
1	h			2	28	478
0	c	3	27	1	27	451
				$\Sigma = 27$	$\Sigma' = 451$	

Der Effekt dieser einen Iteration ist beachtlich: Bildet man wie gehabt die Quotienten, diesmal mit dem Nenner 451, so beträgt der maximale relative Fehler jetzt nur noch 0,0735 %, er wurde also um circa den Faktor 28 verringert. Insbesondere ist die Abweichung eines gemäß der angegebenen Längen unterteilten Monochords von der gleich-

schwebenden Stimmung nicht mehr hörbar, und das bei einer Unterteilung in nur 902 Teile.

Zum Vergleich: Kurz vor Schröter hatte Jacob Georg Meckenheuser (ca. 1666 – ca. 1731) ein entsprechendes Resultat vorgestellt, das auf einer Unterteilung der Monochord-Saite in 160.000.000 Teile basierte [3, S. 460].

4 Der mathematische Hintergrund

Dass die eine von Schröter durchgeführte Iteration sogleich Werte liefert, die im Rahmen der Hörgenauigkeit für die gleichschwebende Stimmung reichen, war für ihn natürlich ein schöner Erfolg, hielt ihn aber offensichtlich auch davon ab, weitere Iterationen durchzuführen oder sich gar Gedanken dazu zu machen, warum diese immer bessere Näherungen für $(\sqrt[12]{2})^j$ für $j = 0, 1, \dots, 12$ liefern. Stattdessen begründete er sein Verfahren durch das Nachrechnen einzelner Beispiele [3, S. 458–460].

4.1 Analyse von Schröters Verfahren

In moderner mathematischer Notation lässt sich der von Schröter beschriebene Iterationsschritt wie folgt beschreiben, sei es für den Übergang von der Spalte „Die kleinen Differenzen“ zu der „Die großen Differenzen“, sei es von der letztgenannten Spalte zu der Spalte „Die gleichschwebende Temperatur“:

Gegeben ist eine Spalte mit den Einträgen x_j für $j = 0, 1, \dots, 11$, wobei j den Exponenten der anzunähernden Potenz von $\sqrt[12]{2}$ angibt und die x_j im Prinzip irgendwelche Zahlen sein können, es sich aber aufgrund der Aufgabenstellung als sinnvoll erweist, diese als positive reelle Zahlen anzunehmen.

Der Übergang zu der direkt rechts daneben liegenden Spalte mit den Einträgen y_j für $j = 0, 1, \dots, 12$ erfolgt durch die Setzungen

$$y_0 := x_0 + x_1 + \dots + x_{11} \quad \text{und} \quad y_j := x_{j-1} + y_{j-1} \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, 12.$$

Hieraus ergibt sich als geschlossener Ausdruck

$$y_j = 2(x_0 + x_1 + \dots + x_{j-1}) + (x_j + x_{j+1} + \dots + x_{11}) \quad \text{für } j = 0, 1, \dots, 12.$$

Insbesondere gilt also $y_{12} = 2y_0$, so dass der Wert y_{12} im Folgenden nicht mehr betrachtet werden muss, man sich also auf die Zahlen mit Indizes von 0 bis 11 beschränken kann.

4.2 Anwendung der Potenziteration

In der Terminologie der Linearen Algebra entsteht die Spalte der y_j , $j = 0, 1, \dots, 11$, aus der der x_j durch Multiplikation von links mit der reellen 12×12 -Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \ddots & 2 & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ddots & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da die Matrix A nur positive Einträge besitzt, hat sie nach einem Ergebnis von Oskar Perron (1880–1975) [1, S. 261, Satz] einen dominanten Eigenwert λ_A , d. h., der Eigenwert λ_A hat die Vielfachheit 1, ist reell, positiv und echt größer als der Absolutbetrag jedes anderen Eigenwertes von A .

Damit lässt sich die Methode der Potenziteration auf diese Problemstellung anwenden: Für jeden Vektor v , der nicht ein Eigenvektor zu einem von λ_A verschiedenen Eigenwert von A ist, konvergiert die Folge

$$A^n v \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

nach geeigneter Normierung gegen einen Eigenvektor zu λ_A .[†]

Die konkret beim Schröterschen Verfahren auftretende Matrix A hat das charakteristische Polynom $\chi_A(t) = (t+1)^{12} - 2t^{12}$, ihre Eigenwerte sind also gleich $\lambda = \frac{1}{\xi^{12\sqrt[12]{2}-1}}$, wobei ξ die 12-ten (komplexen) Einheitswurzeln durchläuft. Der dominante Eigenwert λ_A liegt daher für $\xi = 1$ vor:

$$\lambda_A = \frac{1}{\sqrt[12]{2} - 1}.$$

Die zu λ_A gehörigen Eigenvektoren sind genau die (von 0 verschiedenen) skalaren Vielfachen des Vektors

$$v_A := \begin{pmatrix} (\sqrt[12]{2})^{11} \\ (\sqrt[12]{2})^{10} \\ \vdots \\ \sqrt[12]{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[†]Zur Geschichte der Potenziteration gibt es im DMV-Blog bereits seit 2014 den Beitrag von Jan Peter Schäfermeier [2]. Weitere Informationen zu diesem Verfahren findet man in [5]. Insbesondere gibt es von Jost Bürgi (1552–1632) aus dem Ende des 16. Jahrhunderts ein Verfahren zur näherungsweise Berechnung von Werten der Sinusfunktion, welches sich als Spezialfall der Potenziteration auffassen lässt, analog zum Schröterschen, das ja Werte der Exponentialfunktion zur Basis $\sqrt[12]{2}$ annähert.

Hingegen haben die Eigenvektoren zu den anderen Eigenwerten von A allesamt mindestens einen Eintrag, der kleinergleich 0 ist.

Startet man also mit einem Vektor v mit lauter positiven Einträgen $x_0, x_1, \dots, x_{11}$ und ersetzt die eigentlichen Bildvektoren $A^n v$ durch deren jeweiliges skalares Vielfaches mit dem letzten Eintrag 1, so konvergieren die derart normierten Vektoren gegen den Vektor v_A . (Die Normierung ist dabei stets möglich, da die Matrix A nur positive Einträge besitzt, alle Einträge des Bildvektors Av eines Vektors v mit lauter positiven Einträgen also wieder positiv sind; insbesondere ist der letzte von 0 verschieden.)

4.3 Elementarer Konvergenznachweis

Ohne Verwendung des Satzes von Perron und der Methode der Potenziteration kann man auch direkt einsehen, dass der Schrötersche Iterationsschritt zu besseren Näherungen für die Potenzen $(\sqrt[12]{2})^j$ führt. Der Kürze halber sei im Folgenden $\eta := \sqrt[12]{2}$ geschrieben.

Bereits zuvor war vorausgesetzt worden, dass die Einträge x_j der Ausgangsspalte positive reelle Zahlen sind für $j = 0, 1, \dots, 11$. Eine einmalige Anwendung des Iterationsschrittes führt dann wegen

$$y_j = 2(x_0 + x_1 + \dots + x_{j-1}) + (x_j + x_{j+1} + \dots + x_{11}) \quad \text{für } j = 0, 1, \dots, 12$$

zu wiederum positiven Einträgen y_j , die zudem offensichtlich monoton wachsend mit j sind und insbesondere $y_j \geq y_0$ für $j = 0, 1, \dots, 11$ erfüllen.

Somit kann man durch einen vorweg durchgeführten Iterationsschritt erreichen, dass nicht nur $x_j > 0$, sondern auch $x_j \geq x_0 > 0$ für $j = 0, 1, \dots, 11$ gilt. Diese, auch von der Aufgabenstellung her naheliegende, Zusatzvoraussetzung sei im Folgenden gestellt.

Dann gilt:

Entsteht bei dem Iterationsschritt aus der gegebenen Spalte mit den Einträgen x_j für $j = 0, 1, \dots, 11$ eine Spalte mit den Einträgen y_j , so gilt

$$\max_{0 \leq j \leq 11} \left| \frac{y_j}{y_0} - \eta^j \right| \leq \frac{11}{12} \cdot \max_{0 \leq j \leq 11} \left| \frac{x_j}{x_0} - \eta^j \right|.$$

Jeder Iterationsschritt verringert also die maximale absolute Abweichung der Quotienten y_j/y_0 von η^j im Vergleich zu der der Quotienten x_j/x_0 um einen Faktor kleinergleich $11/12$.

Beweis. Wegen $y_0/y_0 = 1 = \eta^0$ reicht es, die Abweichung von y_j/y_0 und η^j in den Fällen $j = 1, 2, \dots, 11$ zu untersuchen. Da der Iterationsschritt nur homogene lineare Transformationen verwendet, darf man die x_j durch die Quotienten x_j/x_0 ersetzen, sich zur Vereinfachung der Rechnung also auf den Fall beschränken, dass $x_0 = 1$ ist. Für alle $j = 0, 1, \dots, 11$ gilt dann insbesondere $x_j \geq 1$.

Man setze

$$\varepsilon_j := x_j - \eta^j, \quad \text{also} \quad x_j = \eta^j + \varepsilon_j \quad \text{für } j = 0, 1, \dots, 11.$$

Wegen $x_0 = 1 = \eta^0$ ist dann insbesondere $\varepsilon_0 = 0$.

Für $j = 1, \dots, 11$ gilt wegen $\eta^{12} = 2$, dass

$$\begin{aligned}\eta^j \cdot \left(\sum_{k=0}^{11} \eta^k \right) &= \eta^j + \eta^{j+1} + \dots + \eta^{11} + \eta^{12} + \eta^{12+1} + \dots + \eta^{12+(j-1)} \\ &= (\eta^j + \eta^{j+1} + \dots + \eta^{11}) + 2(\eta^0 + \eta^1 + \dots + \eta^{j-1}).\end{aligned}$$

Somit ergibt sich für $j = 1, 2, \dots, 11$ wegen $x_k = \eta^k + \varepsilon_k$ für $k = 1, 2, \dots, 11$, dass

$$\begin{aligned}y_j &= 2(x_0 + x_1 + \dots + x_{j-1}) + (x_j + x_{j+1} + \dots + x_{11}) \\ &= 2(\eta^0 + \eta^1 + \dots + \eta^{j-1}) + 2(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{j-1}) \\ &\quad + (\eta^j + \eta^{j+1} + \dots + \eta^{11}) + (\varepsilon_j + \varepsilon_{j+1} + \dots + \varepsilon_{11}) \\ &= \eta^j \cdot \left(\sum_{k=0}^{11} \eta^k \right) + \eta^j \cdot \left(\sum_{k=0}^{11} \varepsilon_k \right) \\ &\quad + 2(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{j-1}) + (\varepsilon_j + \varepsilon_{j+1} + \dots + \varepsilon_{11}) - \eta^j \cdot \left(\sum_{k=0}^{11} \varepsilon_k \right) \\ &= \eta^j \left(\sum_{k=0}^{11} x_k \right) + (2 - \eta^j) \cdot (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{j-1}) + (1 - \eta^j) \cdot (\varepsilon_j + \varepsilon_{j+1} + \dots + \varepsilon_{11}) \\ &= \eta^j y_0 + (2 - \eta^j) \cdot (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{j-1}) + (1 - \eta^j) \cdot (\varepsilon_j + \varepsilon_{j+1} + \dots + \varepsilon_{11}).\end{aligned}$$

Wegen $\eta = \sqrt[12]{2}$ und $j \in \{1, 2, \dots, 11\}$ gilt $1 \leq \eta^j \leq 2$, also sowohl $|2 - \eta^j| \leq 1$ als auch $|1 - \eta^j| \leq 1$. Weiterhin gilt wegen $1 = x_0 \leq x_k$ für $k \in \{0, 1, \dots, 11\}$, dass $y_0 = \sum_{k=0}^{11} x_k \geq 12 > 0$.

Man setze

$$\varepsilon := \max_{0 \leq j \leq 11} \left| \frac{x_j}{x_0} - \eta^j \right| = \max_{0 \leq j \leq 11} |x_j - \eta^j| = \max_{0 \leq j \leq 11} |\varepsilon_j|,$$

wobei das vorletzte Gleichheitszeichen wegen $x_0 = 1$ gilt und das letzte aufgrund der Definition der ε_j .

Wegen $\varepsilon_0 = 0$ gilt dann für jedes $j \in \{1, 2, \dots, 11\}$, dass

$$\begin{aligned}\left| \frac{y_j}{y_0} - \eta^j \right| &\leq \frac{1}{y_0} \cdot \left| (2 - \eta^j) \cdot (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{j-1}) + (1 - \eta^j) \cdot (\varepsilon_j + \varepsilon_{j+1} + \dots + \varepsilon_{11}) \right| \\ &\leq \frac{1}{y_0} \cdot (0 + |\varepsilon_1| + \dots + |\varepsilon_{j-1}| + |\varepsilon_j| + |\varepsilon_{j+1}| + \dots + |\varepsilon_{11}|) \leq \frac{11}{12} \cdot \varepsilon.\end{aligned}$$

Literatur

- [1] Oskar Perron: Zur Theorie der Matrices. *Mathematische Annalen* **64** (1907), 248–263.

- [2] Jan Peter Schäfermeier: Zur Frühgeschichte der Vektoriteration und der inversen Iteration. 30.10.2014 (Stand: 12.12.2025) <https://www.mathematik.de/dmv-blog/230-geschichte-der-vektoriteration>.
- [3] Christoph Gottlieb Schröter: Nothwendigkeit der Mathematik bey gründlicher Erlernung der musikalischen Composition, dem mit nachdrücklicher Bescheidenheit beurtheilten critischen Musico erwiesen, Teil II. Lorenz Mizlers Musikalische Bibliothek, Band 3, Teil 3 (1747), 409–463.
- [4] Benedetto Scimemi: The Use of Mechanical Devices and Numerical Algorithms in the 18th Century for the Equal Temperament of the Musical Scale. In: Gerard Assayag, Hans Georg Feichtinger, Jose Francisco Rodrigues (Hrsg.): *Mathematics and Music*, S. 49–63. Springer: Berlin, Heidelberg 2002.
- [5] Peter Ullrich: Forerunners of the power iteration method in the 16th and 18th centuries. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics* **22**, e202200270 (2023), <https://doi.org/10.1002/pamm.202200270>.